На правах рукописи

ТЕРПСТРА Мария Александровна

О ГЕОМЕТРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2012

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор,
Кириченко Вадим Федорович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор,
Аминова Ася Васильевна

доктор физико-математических наук,
профессор,
Степанов Сергей Евгениевич

Ведущая организация: Тверской государственный университет

Защита состоится 19 апреля 2012 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37, ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «___» марта 2012 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Данная работа посвящена исследованию почти контактных метрических структур. Это специальные дифференциально-геометрические структуры возникающие на нечетномерном римановом многообразии и порождаемые дифференциальными 1-формами максимального ранга.

Изучение контактных структур и их обобщения – почти контактных структур началось в 50-х годах прошлого века. В 1953 году С. Черн [10] показал, что многообразие M^{2n+1} с фиксированной контактной формой $\eta: \ \eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ допускает G-структуру со структурной группой $U(n) \times \{e\}$.

В 1960 году С. Сасаки в работе [25] показал, что многообразие, допускающее G-структуру со структурной группой $U(n) \times \{e\}$, внутренним образом определяет тройку тензоров (Φ, ξ, η), названную Дж. Греем [16] почти контактной структурой, которые обладают свойствами

$$\eta(\xi) = 1, \ \Phi(\xi) = 0, \ \eta \circ \Phi = 0, \ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi.$$

Более того, С. Сасаки показал, что на таком многообразии M всегда существует положительно определенная метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такая что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

и $\eta(X) = \langle X, \xi \rangle$, дополняющая почти контактную структуру (Φ, ξ, η) до метрической почти контактной структуры. Здесь векторное поле ξ называется характеристическим вектором, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$ называемый структурным эндоморфизмом, а 1-форма η – контактной формой структуры.

Почти контактные и почти контактные метрические многообразия исследовались не только зарубежными авторами, такими как Д. Блэр [9], С. Танно [27], И. Исихара [17], но и отечественными, например [2], [3].

Классификация почти контактных метрических структур была проведена впервые в работах Д. Чинья и Дж. Марреро [11], Д. Чинья и С. Гонзалес [14], В. Ф. Кириченко [3]. Были определены 2048 различных классов почти контактных метрических структур. На сегодняшний день изучается небольшое число этих классов, вызывающих интерес по тем или иным соображениям.

Почти контактные метрические структуры кроме того являются f-структурами [3] и тесно связаны с почти эрмитовыми структурами [24].

Важным примером почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющим их роль в дифференциальной геометрии, служит структура, индуцируемая на гиперповерхности N многообразия M, снабженного почти эрмитовой структурой (J, g). В частности, такая структура индуцируется на нечетномерной сфере S^{2n-1}, рассматриваемой как гиперповерхность в овеществлении пространства C^n. Это один из самых интересных примеров и, более того, он является исторически важным, так как был первым конкретным примером такой структуры. Другой интересный тип примеров почти контактных (метрических) структур дают главные расслоения со структурной группой $T^1 = SO(2, R)$ (главные T^1-расслоения) с фиксированной линейной связностью над почти комплексным (соответственно, почти эрмитовым) многообразием [4], [22].

В дальнейшем исследования почти контактных метрических многообразий были представлены многочисленными работами разными по методам и подходам. Несмотря на необозримую классификацию почти контактных метрических многообразий, исследованию подвергались лишь некоторые из них. Так, наиболее изученными и интересными для нас являются такие подклассы почти контактных метрических многообразий, как квази-сасакиевы, косимплектические, сасакиевы многообразия и многообразия Кенмоцу.

Д. Блэр в работе [9] ввел понятие квази-сасакиевых структур, которые составляют большой класс почти контактных метрических структур. Он же доказал, что характеристический вектор квази-сасакиева многообразия является векторным полем Киллинга, что не существует квази-сасакиевой структуры четного ранга, а с точностью до гомотетии квази-сасакиево многообразие постоянной кривизны является сасакиевым или косимплектическим многообразием. Также были найдены условия, при которых квази-сасакиево многообразие является прямым произведением сасакиева и келерова многообразий. Позднее, изучением этого класса структур занимался так же С. Канемаки [18]. В свою очередь, наиболее полное исследование упомянутого вопроса было проведено В. Ф. Кириченко и А. Р. Рустановым [6] в терминах дополнительных свойств симметрии тензора римановой кривизны квази-сасакиевых многообразий. Ими же были выделены и изучены некоторые интересные классы квази-сасакиевых многообразий.

Класс квази-сасакиевых многообразий включает в себя классы сасакиевых и косимплектических многообразий. Это наиболее изученные классы почти контактных метрических структур, которые в эрмитовой геометрии являются контактными аналогами келеровых многообразий. При этом известно, что косимплектические и сасакиевы структуры характеризуются для любых гладких векторных полей X и Y тождествами

$$\nabla_X(\Phi)Y = 0 \quad \text{и} \quad \nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X$$

соответственно.

В 1972 г. в работе К. Кенмоцу [19] был введен в рассмотрение класс почти контактных метрических структур характеризующийся тождеством:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X,$$

где ∇-риманова связность. Позже эти структуры были названы структурами Кенмоцу. К. Кенмоцу же показал [19], что эти структуры наделены рядом интересных свойств, в частности, они нормальны и интегрируемы, но не являются контактными и, тем более, сасакиевыми. Позднее Б. Синха и А. Шриваштава [26], [27] изучали многообразия Кенмоцу постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны. Кобаяши Минору [21] определил свойства контактных нормальных подмногообразий в многообразиях Кенмоцу. Полное описание структур Кенмоцу дал В. Ф. Кириченко. Он исследовал их локальное строение и получил полную классификацию данных многообразий точечно постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны, указав случай глобального постоянства этой кривизны на рассматриваемых многообразиях.

Кроме изучения самих классов почти контактных метрических структур современная геометрия занимается и изучением преобразований этих структур.

Так, большой интерес вызывают конформные преобразования почти контактных метрических структур. Исследованием этих преобразований занимались Д. Чиней и Дж. Марреро [12], [13]. Под конформным преобразованием почти контактной метрической структуры (Φ, ξ, η, g) они понимали преобразование вида:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi; \quad \widetilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta; \quad \widetilde{\xi} = e^{\sigma}\xi; \quad \widetilde{g} = e^{-2\sigma}g \ ,$$

где σ – гладкая функция на многообразии.

Изучение нормальных почти контактных метрических структур, метрика которых допускает локально-конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру, было начато в работах В.А. Левковца [7]. Он выделил подклассы нормальных почти контактных метрических многообразий, названных L-

многообразиями и локально конформно квази-сасакиевыми (короче, $lcQS$-) многообразиями, соответственно. Локально конформно квази-сасакиевы многообразия были исследованы в работе В. Ф. Кириченко и Н. С. Баклашовой [5]. Ими было введено понятие контактной формы Ли и показано, что примерами таких структур являются структуры Кенмоцу, причем доказано, что $lcQS$ структура является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда ее контактная форма Ли совпадает с контактной формой.

Кроме структур Кенмоцу, класс локально конформно квази-сасакиевых структур включает в себя квази-сасакиевы структуры, в том числе структуры Сасаки и косимплектические структуры. Поэтому изучение такого обобщения действительно представляет интерес. В связи с этим, в данной работе все результаты полученные для почти контактных метрических структур будут рассматриваться и для $lcQS$-структур в частности.

В 1940 году К. Яно [30] нашел условие, при котором конформное отображение переводит любую геодезическую окружность в геодезическую окружность. Такое отображение он назвал конциркулярным, а векторное поле, порождающее в окрестности U каждой точки $p \in M$ локальную 1-параметрическую группу локальных преобразований, являющихся конциркулярными движениями, было названо им конциркулярным векторным полем. Так же К. Яно, в работе [31], вводит понятие торсообразующего векторного поля, обобщающее понятие конциркулярное векторное поле.

В рамках общей теории относительности конциркулярные векторные поля рассматривал Такено [29]. В дальнейшем, изучением конциркулярных векторных полей занимались И. Г. Шандра [8] , Й. Микеш [23], А. В. Аминова [1] и другие.

Кроме конциркулярных векторных полей, также рассматривались их частные случаи: рекуррентные и спецконциркулярные векторные поля [20].

Таким образом, приведенный обзор исследований показывает насколько эти вопросы интересны для современной геометрии.

Цель и задачи диссертационного исследования.

Целью диссертационной работы является исследование геометрии характеристического вектора почти контактных метрических структур. В частности, когда характеристический вектор является торсообразующим, конциркулярным, рекуррентным или спецконциркулярным векторным полем. Результаты, полученные для AC-многообразий, были также рассмотрены, в частности, для

$lcQS$-структур.

Для достижения поставленной цели определены следующие основные задачи:

— Найти условия, когда характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия будет торсообразующим, или, более того, локально-конциркулярным, рекуррентным или спецконциркулярным векторным полем. Найти вид его определяющих элементов.

— Найти условия, когда характеристический вектор AC-многообразия является конформным векторным полем или векторным полем Киллинга. Определить эти условия в случае, когда характеристический вектор является торсообразующим, в частности сценцконциркулярным, конциркулярным, или рекуррентным векторным полем.

— Найти условия, при которых торсообразующий, в частности конциркулярный, спецконциркулярный или рекуррентный характеристический вектор AC-структуры является аффинным векторным полем. Найти вид этих условий для $lcQS$-многообразий.

— Определить условия инвариантности почти контактных метрических структур, $lcQS$-структур и нормальных AC-структур отностиельно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов порожденной характеристическим векторным полем. Найти эти условия в случае торсообразующего и рекуррентного характеристического векторного поля.

Методы исследования. В настоящей работе в качестве метода исследования используется инвариантное исчисление Кошуля.

Научная новизна. Основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получены условия, при которых характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия является торсообразующим, локально-конциркулярным, рекуррентным или спецконциркулярным векторным полем. Найдены его определяющие элементы.
2. Показано, что нормальная $lcQS$-структура с торсообразующим характе-

ристическим векторным полем локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

3. Показано, что если характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия является конформным векторным полем, то это квази-сасакиево многообразие, а его характеристический вектор является векторным полем Киллинга.

4. Доказано, что если ξ – характеристический вектор AC-структуры, являющийся торсообразующим векторным полем. Тогда ξ – спецконциркулярное векторное поле с определяющей функцией $\frac{1}{2}\sigma$ тогда и только тогда, когда ξ – конформное векторное поле с определяющей функцией σ.

5. Найдено условие того, что торсообразующий, конциркулярный, рекуррентный или спецконциркулярный характеристический вектор AC-структуры является аффинным векторным полем. Также найден вид условий, при которых торсообразующий характеристический вектор многообразий Кенмоцу и нормальных локально конформно косимплектических $lcQS$-многообразий является аффинным векторным полем.

6. Найдены условия инвариантности почти контактных метрических структур относительно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной характеристическим вектором, торсообразующим характеристического вектором и рекуррентным характеристическим вектором. Определено когда характеристический вектор сохраняет нормальную AC-структуру и $lcQS$-структуру.

Теоретическое и прикладное значение. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении почти контактных метрических структур в соответствующих разделах дифференциальной геометрии и математической физики. Кроме этого, они могут найти применение в качестве материала для специальных курсов по близкой тематике, например в Московском педагогическом государственном университете и Казанском государственном университете.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации были доложены на следующих семинарах и конференциях:

— вторая Российская школа-конференция с международным участием для молодых ученых «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (Тверь, декабрь 2010 г.);
— геометрический семинар кафедры геометрии Московского педагогического государственного университета, рук. В. Ф. Кириченко (апрель 2011 г.);
— международная конференция «Геометрия в Одессе — 2011» (Украина, Одесса, май 2011 г.);
— геометрический семинар кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета, рук. А. М. Шелехов (октябрь 2011 г.);
— международный геометрический семинар имени Г. Ф. Лаптева «Лаптевские чтения — 2011» (Пенза, сентябрь 2011 г.)
—научном семинаре кафедры геометрии под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора В.В. Шурыгина в Казанском государственном университете (Казань, февраль 2012 г.)

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 4 печатных работы, из них 1 статья в рецензируемом журнале, 2 тезиса докладов.

Личный вклад автора. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. В работе, выполненной в соавторстве, вклад автора составляет приблизительно 70%.

Структура диссертации. Основное содержание диссертации изложено на 84 страницах. Диссертация состоит из введения, трёх глав, состоящих из 9 параграфов, заключения и списка литературы содержащего 48 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы, представляется исторический обзор по развитию тематики, формулируются основные цели и задачи диссертационного исследования, излагаются основные результаты, полученные в работе.

Глава 1. Основные понятия и определения.

В §1 даётся определение почти контактной метрической структуры; задаётся пара взаимно дополнительных фундаментальных распределений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ и пара проекторов на эти распределения, l и m соответственно;

В §2 описываются основные классы почти контактных метрических структур, используемых в диссертации, а именно: нормальные структуры, сасакиевы структуры, косимплектические структуры, квази-сасакиевы структуры, структуры Кенмоцу и локально конформно квази-сасакиевы структуры.

Глава 2. Геометрия характеристического вектора $lcQS$-многообразия.

В §1 рассматриваются такие понятия, как торсообразующее, локально-конциркулярное, конциркулярное, рекуррентное, локально-рекуррентное и специальное конциркулярное векторное поле относительно характеристического вектора $lcQS$-многообразия.

Замечание 2.1 Если многообразие односвязно, то понятие конциркулярности и локальной конциркулярности совпадают.

Замечание 2.2 Если у многообразия первое число Бетти равно нулю, то понятие конциркулярности и локальной конциркулярности совпадают.

Лемма 2.1 Нормальная $lcQS$-структура локально конформно косимплектична тогда и только тогда, когда $C = 0$.

Теорема 2.1 Характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия является торсообразующим векторным полем тогда и только тогда, когда это многообразие локально конформно косимплектично. Его определяющие элементы – скалярное и ковекторное поля ρ и a определяются единственным образом следующими соотношениями:

$$\rho = \eta(\alpha^{\#}); \qquad a(X) = -\eta(\alpha^{\#})\eta(X).$$

Следствие 2.1 Характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия является рекуррентным или спецконциркулярным векторным полем тогда и только тогда, когда это многообразие локально конформно косимплектично, а контактный вектор ξ параллелен в римановой связности.

Теорема 2.2 Торсообразующее векторное поле ξ нормальной $lcQS$-структуры является локально-конциркулярным векторным полем с определяющими элементами

$$\rho = \eta(\alpha^{\#}) = \alpha(\xi) \qquad \text{и} \qquad a = -d\sigma = -\alpha.$$

Замечание 2.3 Для $lcQS$-структур понятия локальной конциркулярности и конциркулярности совпадают, тогда и только тогда, когда эта структура глобально квази-сасакиева.

Следствие 2.2 Характеристический вектор ξ многообразия Кенмоцу является локально-конциркулярным векторным полем с определяющими элементами:

$$\rho = 1,\ a = -\eta.$$

Следствие 2.3 Характеристический вектор ξ квази-сасакиева многообразия M является локально-конциркулярным векторным полем тогда и только тогда, когда M – косимплектическое многообразие. Более того, в этом случае $\nabla_X(\xi) = 0$.

Предложение 2.1 Если характеристический вектор нормального $lcQS$-многообразия локально-конциркулярен, то контактная форма этого многообразия замкнута.

Теорема 2.3 Пусть M – $lcQS$-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $lcQS$-структура нормальна и ее характеристический вектор локально-конциркулярен;
2. $lcQS$-структура локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

Следствие 2.4 Характеристический вектор нормального регулярного $lcQS$-многообразия является локально-конциркулярным векторным полем.

Следствие 2.5 Характеристический вектор ξ многообразия Сасаки не является ни локально-конциркулярным, ни торсообразующим векторным полем.

В §2 рассматривается условие, при котором характеристический вектор почти контактного метрического многообразия является конформным векторным полем. Доказана

Теорема 2.4 Если характеристический вектор нормального $lcQS$ многообразия является конформным векторным полем, то это – квази-сасакиево многообразие, а его характеристический вектор является векторным полем Киллинга.

Следствие 2.6 Для сасакиевых, квази-сасакиевых, косимплектических структур характеристический вектор ξ является векторным полем Киллинга.

Предложение 2.2 Характеристический вектор ξ многообразия Кенмоцу не является конформным векторным полем, в частности, не является векторным полем Киллинга.

В §3 рассматривается условие, при котором торсообразующий характеристический вектор является конформным векторным полем. Доказана

Теорема 2.5 Пусть ξ – характеристический вектор являющийся торсообразующим векторным полем. Тогда ξ – спецконциркулярное векторное поле с определяющей функцией $\frac{1}{2}\sigma$ тогда и только тогда, когда ξ конформное векторное поле с определяющей функцией σ.

Следствие 2.7 Пусть ξ – характеристический вектор AC-структуры, являющийся торсообразующим векторным полем. Тогда ξ –векторное поле параллельное в римановой связности тогда и только тогда, когда ξ – векторное поле Киллинга.

Следствие 2.8 Пусть ξ – характеристический вектор AC-структуры, являющийся рекуррентным векторным полем. Тогда ξ – векторное поле с определяющей функцией $\Psi = const$ тогда и только тогда, когда ξ – векторное поле Киллинга.

В §4 рассмотрен торсообразующий характеристический вектор, являющийся аффинным векторным полем.

Теорема 2.6 Торсообразующий характеристический вектор AC-структуры с определяющими элементами ρ и a является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда

$$(a(Y) - \eta(Y)(a(\xi) + 2\rho))\nabla_Z(\eta(X)) + (a(X) - \eta(X)(a(\xi) + 2\rho))\nabla_Z(\eta(Y)) - \\ -\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \nabla_Z(a(\xi)) + 2\rho\nabla_Z(\langle X, Y\rangle) = 0.$$

Предложение 2.3 Характеристический вектор многообразия Кенмоцу является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда

$$\nabla_Z\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = 0.$$

Предложение 2.4 Характеристический вектор нормального локально конформно косимплектического $lcQS$-многообразия является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда

$$\eta(\alpha^{\#})\nabla_Z\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = -\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \nabla_Z(\eta(\alpha^{\#})).$$

Следствие 2.9 Характеристический вектор нормального регулярного $lcQS$-многообразия является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда

$$\eta(\alpha^{\#})\nabla_Z\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = -\langle \Phi X, \Phi Y\rangle \nabla_Z(\eta(\alpha^{\#})).$$

Здесь же исследуется условие, при котором спецконциркулярный и рекуррентный торсообразующий вектор является аффинным векторным полем.

Предложение 2.5 Спецконциркулярный характеристический вектор AC-структуры является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда $\rho = 0$, то есть он параллелен в римановой связности.

Предложение 2.6 Рекуррентный характеристический вектор AC-структуры является аффинным векторным полем тогда и только тогда, когда

$$-d\Psi(\xi)(\nabla_Z(\eta(Y)\eta(X)) = d\Psi(Y)\nabla_Z(\eta(X)) + d\Psi(X)\nabla_Z(\eta(Y)).$$

Глава 3. Инвариантность AC-структуры относительно характеристического вектора.

В §1 рассматривается условие инвариантность структурного эндоморфизма AC-структуры относительно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных характеристическим ветором (Φ-инвариантность).

Φ-инвариантность структуры равносильна тому, что

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi) = 0.$$

Теорема 3.1 AC-структура (η, ξ, Φ, g) Φ-инвариантна тогда и только тогда, когда выполняется следующее тождество

$$\nabla_\xi(\Phi)Y = \nabla_{\Phi Y}(\xi) - \Phi(\nabla_Y \xi).$$

Предложение 3.1 Квази-сасакиевы струкруты Φ-инвариантны

Следствие 3.1 Косимплектические структуры и структуры Сасаки Φ-инвариантны.

Также доказана

Теорема 3.2 lcQS-структура Φ-инвариантна тогда и только тогда, когда эта структура нормальна.

Был рассмотрен вопрос Φ-инвариантности нормальных структур. Доказана

Теорема 3.3 Нормальная AC-структура (η, ξ, Φ, g) Φ-инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\nabla_{\Phi^2(X)}\xi - \Phi\nabla_{\Phi(X)}\xi = 0.$$

В §2 рассматривается условие инвариантность контактной формы AC-структуры относительно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных характеристическим ветором (η-инвариантность).

η-инвариантность структуры равносильна тому, что

$$\mathfrak{L}_\xi(\eta) = 0.$$

Показанно, что данное условие можно представить в виде

$$\nabla_\xi(\eta)X = 0.$$

Теорема 3.4 $lcQS$-структура η-инвариантна тогда и только тогда , когда она нормальна.

Следствие 3.2 Квази-сасакиевы структуры, косимплектические структурыу, структуры Сасаки и Кенмоцу являются η-инвариантными.

В §3 рассматриваются условия инвариантности AC-структуры относительно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной характеристическим вектором ξ. Доказаны

Теорема 3.5 Характеристический вектор ξ сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда

1) $\nabla_\xi(\Phi)Y = \nabla_{\Phi Y}(\xi) - \Phi(\nabla_Y \xi)$

2) $\nabla_\xi \xi = 0$

3) $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle = 0$

Теорема 3.6 Характеристический вектор ξ сохраняет структуру $lcQS$-многообразия тогда и только тогда, когда это квази-сасакиево многообразие.

Следствие 3.3 Характеристический вектор ξ не сохраняет почти контактную метрическую структуру многообразия Кенмоцу.

Следствие 3.4 Характеристический вектор ξ сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) многообразия Сасаки, квази-сасакиева многообразия и косимплектического многообразия.

Предложение 3.3 Характеристический вектор ξ сохраняет нормальную почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда

1) $\nabla_{\Phi^2(X)}\xi - \Phi\nabla_{\Phi(X)}\xi = 0$

2) $\nabla_\xi \xi = 0$

3) $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle = 0$

Теорема 3.7 Торсообразующий характеристический вектор ξ с определяющими элементами ρ и a сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда

$$a = 0 \qquad \rho = 0$$

Теорема 3.8 Рекуррентный характеристический вектор ξ, с определяющим элементом Ψ, сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда $\Psi = const$.

Автор выражает глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Кириченко В.Ф. за постановку проблемы, внимание и помощь, оказанную автору при работе над диссертационным исследованием.

Список литературы

1. Аминова, А. В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* [Текст]/А. В. Аминова // М.: Янус-К. № 5. –2003. –С. 46–172.

2. Евтушик, Л. Е. *Дифференциально геометрические структуры на многообразиях* [Текст] /Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНИТИ, –Т. 9, –1979.

3. Кириченко, В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* [Текст]/ В. Ф. Кириченко// М.: Типография МПГУ. –2003.–С. 440–468.

4. Кириченко, В. Ф. *Дифференциальная геометрия главных тороидальных расслоений* [Текст]/ В. Ф. Кириченко // Фундамент. и прикл. матем. –2000. –С. 1095–1120.

5. Кириченко, В. Ф. *Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты* [Текст]/ В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова // , М.: Математические заметки. –Т. 82, вып. 3, –2007, –С. 347–360.

6. Кириченко, В. Ф. *Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий* [Текст]/ В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов // Матем. сб. –2002. –С. 71–100.

7. Левковец, В. А. *Геометрия локально конформно квази-сасакиевых многообразий* [Текст]/ В. А. Левковец//М.: дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. –2004. –С. 75-77.

8. Шандра, И. Г. *О конц累ркулярных тензорных полях и геодезических отображениях псевдориманновых пространств* [Текст]/И. Г. Шандра // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 75-86.

9. Blair, D. E. *Two remarks on contact vetric structures* [Text]/D. E. Blair // Thoku Math. J.–1977. – № 3. –P. 319-324.

10. Chern, S. *Pseudo-groups continus infinis* [Text]/ S. Chern//Paris.: Colloq. Ihternat. Centre nat. rech. scient. –1953, –P. 119–136.

11. Chinea, D. *Classification of almost contact metric structures* [Text]/ D. Chinea, J. C. Morrero// Rev. roum de math. pures et appl. 37. – № 3. –1992. –P. 199–211.

12. Chinea, D.*Conformal changes of almost contact metric structures* [Text]/D. Chinea, J. C. Morrero// Riv. mat. Univ. Parma. – 1992. – P. 19–31.

13. Chinea, D. *Conformal changes of almost cosymplectic manifolds* [Text]/D. Chinea, J. C. Morrero// Rend. mat. appl. – 1992. - 12, – № 4, – P. 849–867.

14. Chinea, D. *Classification of almost contact metric structures* [Text]/ D. Chinea, C. Gonzalez// Annali di Matematica pura ed applicata (IV).V. CLVI. –1990.– P. 15–36.

15. Goldberg, S. *Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds* [Text]/S. Goldberg // Pacific J.Math. 27. – № 2. –1968,–P. 275–281.

16. Gray, .J *Some global properties of contact structures* [Text]/J. Gray// Ann. Math., –1959. 69, – № 2,–P. 412–450.

17. Ichihara I. *Anti-invariant submanifolds of a Sasaki space form* [Text]/I. Ichihara// Kodai Match. J. –1979.– V. 2. –P. 171–186.

18. Kanemaki, Sh. *Quasi-Sasakian manifolds* [Text]/Sh. Kanemaki// Tôhoku Math. J.(2).– 1977. –V. 298. –P. 227-233.

19. Kenmotsu, K. *A class of almost contact Riemannian manifolds* [Text]/ K. Kenmotsu// Tôhoku Math. J. 24. –1972.–P. 93–103.

20. Kim, I.-B. *Special concircular vector fields in Riemannian manifolds* [Text]/I.-B. Kim// Hiroshima Math.J. –1982.–V.12.– № 1. –P. 77–91.

21. Kobayashi, M. *Submanifolds in Kenmotsu manifolds* [Text]/M. Kobayashi // Rev. Math. Univ. completense. Madrid. –1991. – № 1. –P. 73-95.

22. Kobayashi, S. *Principal firbe bundles with 1-dimensional toroidal group* [Text]/ S. Kobayashi// Tohoku Math. J. 8 .–1956. –P. 29-45.

23. Mikesh, J.*Geodesic mappings of special Riemannian spaces* [Text]/J. Mikesh// Amsterdam: Top. Differ. Geom.: Collog. Debrecen. 26 Aug.-Sept. 1, –1984. –V. 2. –1988.–P. 793-813.

24. Ogiue, K. *On fibering of almost contact manifolds* [Text]/K. Ogiue// Kodai Math. Semin Repts. 17. – № 1 .–1965. –P. 53-62.

25. Sasaki, S. *On the integrability of almost contact structures* [Text]/S. Sasaki, G. J. Hsu// Tôhoku Math. J., 14, –1962, –P. 167–176.

26. Sinha, B. B. *Curvatures on Kenmotsu manifolds* [Text]/B. B. Sinha, A. K. Srivastava // Indian J. Pure and Appl. Math. –1991. – № 1.–P. 23-28.

27. Sinha, B. B. *Semi-invariant submanifolds of a Kenmotsu manifold with constant ϕ-holomorphic sectional curvature II* [Text]/B. B. Sinha, A. K. Srivastava// Indian J. Pure and Appl. Math. –1992. – № 11. –P. 783-789.

28. Takeno, H. *Concircular scalar field in spherically symmetric space-times* [Text]/ H. Takeno// Tensor. – 1967. – № 2. –P. 167–176.

29. Tanno, S. *Quasi-Sasakian structures of rank 2p+l* [Text]/S. Tanno// J.Differential Geom. –1971. V. 5. –P. 317–324.

30. Yano, K.: *Concircular geometry* [Text]/K. Yano// Proc. Imp. Acad. Tokio. – 1940. - V. 16. – P. 195-200, 354-360, 442-448, 505-511.

31. Yano, K. *On torse-forming directions in Riemannian space* [Text]/K. Yano // Proc. Imp. Acad. Tokyo. –1944.–V. 20.–P. 340–345.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Терпстра М. А. *Инвариантность AC-структуры относительно торсообразующего вектора Риба* [Текст]/ М.А. Терпстра // Пенза: Известия пензенского гос. пед. университета им. В.Г.Белинского. Типография ПГПУ.– №26. –2011. –С. 248-254.

2. Терпстра М. А. *Инвариантность AC-структуры относительно характеристического вектора* [Текст]/ М А. Терпстра// Труды международного геометрического цента $d\omega$, Одесса: Т.4. № 3, –2011. –С. 40-50.

3. Терпстра М. А. *О геометрии характеристического вектора $lcQS$-многообразия.* [Текст]/М.А. Терпстра //Казань: Труды матем. центра имени Н.И.Лобачевского. – Т.44. –2011.–С. 275-277.

4. Терпстра М. А. *Вектор де Риба lsQS-многообразия* [Текст]/ М.А. Терпстра, В. Ф. Кириченко// Тезисы докладов международной конференции Геометрия в Одессе. –2011. –С. 42.